

受験番号	
------	--

(受験番号を記入すること)

2024 年度

東京大学大学院工学系研究科

航空宇宙工学専攻 入学試験問題

専門科目 (午前)

時間： 9:00～12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開かないこと。
2. 4科目中3科目を選択して解答すること。
3. 解答用紙3枚が渡されるので、1科目ごとに1枚の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙には、科目名及び受験番号を記入すること。
5. 解答用紙及び問題冊子は持ち帰らないこと。



## 流体力学 (午前)

二次元定常非圧縮性粘性流れ (粘性係数  $\mu$ , 密度  $\rho$ , 共に一定) におかれた物体上に発達する乱流境界層について考える。座標系として, 物体表面に沿った方向を  $x$  座標, 物体表面に垂直な方向を  $y$  座標にとる ( $y$  座標の原点は物体表面)。  $x$  座標方向の流速成分を  $u$ ,  $y$  座標方向の流速成分を  $v$  とする。境界層外縁での  $x$  方向流速成分を  $U$  とする。境界層の厚さを  $\delta$ , 流体に働く剪断応力を  $\tau$ , 物体表面における剪断応力を  $\tau_w$  とする。境界層方程式は(1)式で表される。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (1)$$

排除厚さ  $\delta^*$  および運動量厚さ  $\theta$  を(2)式のように定義し, これらを境界層の厚さを表すパラメータとして用いる。形状係数  $H$  を(3)式のように定義する。このとき, (4)式が成り立つことが知られている。

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad \theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (2)$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} (U^2 \theta) + \delta^* U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (4)$$

ここでは,  $U$  が  $x$  のみの関数である場合を考える。その時に  $x$  軸方向に発達する乱流境界層について考えたい。以下の問いに答えよ。

### 第1問

過去の研究で, 乱流境界層の  $\tau_w$  の値は, (5)式で表せることが実験的に確かめられている。

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = AR^{-p} \quad (5)$$

ただし  $A$  は  $H$  の関数,  $R$  は(6)式で定義されるレイノルズ数,  $p$  は正の定数である。

$$R = \frac{\rho U \theta}{\mu} \quad (6)$$

(7)式が成り立つことを示せ。

$$\frac{dz}{dx} + \frac{k}{U} \frac{dU}{dx} z - B = 0 \quad (7)$$

ここで

$$z = \theta R^p, \quad B = A(1+p), \quad k = (1+p)(2+H) - p$$

である。

(次ページへ続く)

## 第2問

境界層の特性が下流方向に向かって大きく変化することが無い場合を考える。形状係数  $H$  は  $x$  方向に対して変化しないとする。(7)式を用いて(8)式が成り立つことを示せ。ただし添字 0 は物体上の基準とした  $x$  位置における物理量を意味する。(8)式より運動量厚さの  $x$  方向変化を求めることができる。

$$zU^k = z_0(U_0)^k + B \int_{x_0}^x U^k dx \quad (8)$$

## 第3問

前問では、 $H$  は  $x$  方向に対して変化しないと考えたが、実際には  $H$  の値は変化する。この効果を考慮に入れるために、境界層の厚さを表わすパラメータの一つとしてエネルギー厚さ  $\theta^*$  を(9)式のように定義する。

$$\theta^* = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) dy \quad (9)$$

(1)式の両辺に  $u$  を乗じ  $y = 0$  から  $y = h$  まで  $y$  方向へ積分することで、(10)式に示す関係が成り立つことを示せ。ここで  $h$  は定数で、 $y = h$  は境界層の外側に位置している。

$$\frac{d}{dx}(U^3\theta^*) = 2U^3E \quad (10)$$

ただし、

$$E = \int_0^\delta \frac{\tau}{\rho U^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{U}\right) dy \quad (11)$$

である。ここでは(12)式に示す定理を用いてよい ( $a$  と  $b$  は定数である)。

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) dy = \frac{d}{dx} \int_a^b f(x,y) dy \quad (12)$$

## 第4問

(4)式と(10)式の間で  $\theta$  の  $x$  微分項を消去することによって  $H$  の  $x$  方向変化を表す(13)式を導け。

$$z \frac{dH}{dx} + \left(G \frac{\tau_w}{\rho U^2} - 2E\right) R^p \frac{dH}{dG} - (H-1)G \frac{z}{U} \frac{dH}{dG} \frac{dU}{dx} = 0 \quad (13)$$

ただし、 $G$  は  $H$  からの類推で(14)式のように定義される無次元量である。

$$G = \frac{\theta^*}{\theta} \quad (14)$$

## 固体力学 (午前)

図 1 に示す、マストとそのマストで支持された 2 枚の柔軟な太陽電池パネルについて考える。図 2 に示すように、マストを一様な片持ちはりにモデル化し、2 枚のパネルはまとめて一本の一様な弦にモデル化して、その両端をはりの両端に結合する。よって、はりと弦との両端でのオフセットは 3 軸方向全てない。はりの曲げ変形  $w(x)$  は  $xz$  面内のみを考慮する。はりの線膨張係数  $\alpha$  が弦の線膨張係数  $\alpha_0$  より大きいため ( $\alpha > \alpha_0 > 0$ )、低温  $T_L$  で弦の張力がちょうどゼロになるように、常温  $T_N$  ( $T_L < T_N$ ) において自然長  $L$  の弦に自然長  $L + \delta$  のはりを結合する。更に、高温  $T_H$  ( $T_N < T_H$ ) ではりの圧縮荷重が図 3 に示すような Euler 座屈を生じる荷重にちょうど達するように、はりの断面積を定める。はりの断面積、ヤング率、断面 2 次モーメントをそれぞれ  $A, E, I$  と表し、弦の断面積、ヤング率をそれぞれ  $A_0, E_0$  と表す。はりと弦は同じ温度である。また、弦は曲げ剛性を有さず、圧縮荷重を伝達できないとする。以下の設問に解答せよ。必要に応じて以下の近似を用いよ。

$$L \gg \delta, \quad 1 \gg \alpha(T_H - T_L) \quad (1)$$

### 第 1 問

圧縮荷重  $P$  ではりに曲げ変形  $w(x)$  が生じたと仮定して、曲げ変形したはりの微小要素の力の釣合より、Euler 座屈の微分方程式を導け。微小要素とそれに働く圧縮荷重  $P$  とせん断荷重  $Q$ 、曲げモーメント  $M$  の図と、方程式の導出過程を解答に含めること。必要ならば、 $M$  と  $w(x)$  の間の以下の関係を用いよ。

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2)$$

### 第 2 問

このはりの Euler 座屈荷重を求めるために座標  $x$  の代わりに図 3 に示す座標  $x'$  で表した曲げ変形  $w$  を用いる場合、その先端と根元に適用する境界条件を「固定」、「単純支持」、「自由」の条件からそれぞれ選択せよ。そして、その選択理由を説明せよ。

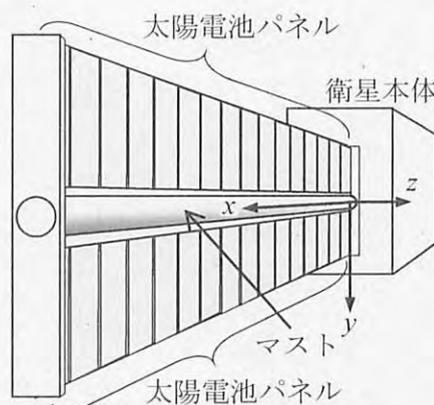


図 1. マストと太陽電池パネル

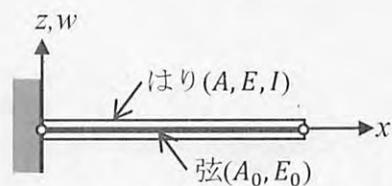


図 2. はりと弦のモデル

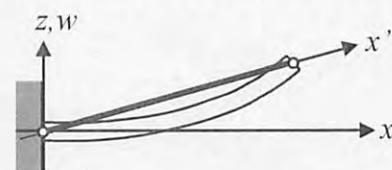


図 3. Euler 座屈後の曲げ変形

(次ページへ続く)

### 第3問

はりの自然長 $L + \delta$ の $\delta$ を $L, \alpha, \alpha_0, T_N, T_L$ を用いて表せ。

### 第4問

高温 $T_H$ ではりに生じる圧縮荷重 $P_0$ の大きさを $\alpha, \alpha_0, T_H, T_L$ 等を用いて表せ。

軌道上において前述の手法で設計されたマストが低温 $T_L$ で  $xz$  面内に座屈した。調査の結果、以下のことが判明した。

- ・ 低温 $T_L$ においてマストの荷重が第4問で求めた圧縮荷重 $P_0$ に達したこと。
- ・ 太陽電池パネルに使用されていた素材 X のヤング率が温度 $T_g$  ( $T_N > T_g > T_L$ )の前後で急激に変化すること。
- ・ 設計過程において、素材 X のヤング率の変化を見落とし、素材 X 製の構造部材を太陽電池パネルの弦のモデルに反映する必要はないと判断したこと。

この素材 X 製の構造部材を既存の弦に反映するのではなく、常温 $T_N$ で自然長 $L$ の一般的な別の弦として新たにモデル化する。この弦は図2のモデルに追加され、既存の弦と同様にその両端ははりの両端に結合される。したがって、更新された図2のモデルははりと2本の弦からなる。この新たな弦の断面積、ヤング率、線膨張係数をそれぞれ $A_1, E_1, \alpha_1$ とする。常温 $T_N$ では、この弦のヤング率 $E_1$ は、はりのヤング率 $E$ の1.0%である。

### 第5問

低温 $T_L$ における比率 $E_1/E$ を以下の関係を用いて求めよ。

$$T_N = 300 \text{ [K]}, T_L = 100 \text{ [K]}, T_H = 400 \text{ [K]}$$

$$E_0 = 0.1E, A_0 = A, A_1 = 0.01A, \alpha = 5\alpha_0, \alpha_1 = 9\alpha_0$$

そして、設計過程で素材 X 製の構造部材を弦のモデルに反映する必要はないと判断した理由を含めて、マストが低温で座屈した理由を説明せよ。

## 航空宇宙システム学 (午前)

図1に示すように、大気圏から宇宙空間へ飛翔するロケットに対して、弾道飛行中の姿勢制御を考える。ロケットの慣性主軸は機体座標軸に一致し、 $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ の各軸の慣性モーメントを $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  ( $> 0$ , 定数), 機体座標系における各軸周りの機体角速度を $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , 制御トルクを $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$ , 時間を $t$ とする。ロケットを剛体とみなすとき、以下の設問に答えよ。解答に必要な仮定や、変数、定数があればそれらを定義した上で使うこと。

### 第1問

機体座標系における回転運動の運動方程式(オイラー方程式)を、慣性モーメント、機体角速度、制御トルクを用いて $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ の各軸の成分にわけて導け。ここでは大気の影響を考えなくてよい。

### 第2問

機体角速度および制御トルクが $\omega_y = \omega_z = 0$ ,  $N_y = N_z = 0$ を満たすとして、ロケットが大気中を飛翔する場合の $X$ 軸周りのスピン制御を考える。 $I_{yy} = I_{zz} = I$ とし、大気の影響による $X$ 軸周りの角速度のダンピング係数を $c_x$  ( $> 0$ , 定数) とするとき、 $X$ 軸に関する運動方程式は次のようになる。

$$I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + c_x \omega_x = N_x \quad (1)$$

角速度 $\omega_x$ の目標値を $r$ とし、その偏差を $e = r - \omega_x$ とする。

1.  $N_x$ ,  $\omega_x$ ,  $r$ のラプラス変換を $N(s)$ ,  $W(s)$ ,  $R(s)$ とする。このとき、 $N(s)$ から $W(s)$ への伝達関数 $P(s)$ を $c_x$ ,  $I_{xx}$ を用いて表せ。
2.  $X$ 軸周りのスピン制御として、比例ゲインを $k_p$ とした $N_x = k_p e$ に従うフィードバック制御を適用する。この制御システムを表すブロック線図を $N(s)$ ,  $W(s)$ ,  $R(s)$ ,  $P(s)$ ,  $k_p$ を用いて描け。また、このときの $R(s)$ から $W(s)$ への伝達関数 $T(s)$ を $k_p$ ,  $c_x$ ,  $I_{xx}$ を用いて表せ。
3. このフィードバック制御系が安定であるための $k_p$ の条件を求めよ。
4.  $k_p$ がこの制御系の安定条件を満たすものとする。この制御系に対して、目標値としてステップ入力 $r(t) = bu(t)$ を与えて、それに追従する制御を行うことを考える ( $b$ : 正の定数,  $u(t)$ : 単位ステップ入力)。制御にかける時間が十分長いとき、定常偏差 $e$ を最終値の定理から求めよ。

(次ページに続く)

第3問

スピン制御完了後、ロケットはしばらく飛翔した後に時刻 $t = t_0$ において大気圏を脱出するとする。大気圏脱出以降、 $N_x = N_y = N_z = 0$ が成り立つとし、以下の姿勢運動（ニューテーション運動）が観察されたとする。

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_s \\ \omega_y = \omega_p \sin\{n(t - t_0)\} \\ \omega_z = \omega_p \cos\{n(t - t_0)\} \end{cases} \quad (2)$$

ただし、 $\omega_s (> 0)$ 、 $\omega_p (> 0)$ 、 $n$ はいずれも定数である。 $I_{yy} = I_{zz} = I$ 、 $I > I_{xx}$ とする。ここでは大気の影響を考えなくてよい。

- 第1問で示した運動方程式を用いて、 $n$ を $\omega_s$ 、 $I$ 、 $I_{xx}$ により表せ。
- 図2に示すように、角運動量ベクトルと $X$ 軸のなす角（ニューテーション角）を $\alpha$ とする。観察されたニューテーション運動が $\omega_p = 0.025\omega_s$ 、 $\alpha = 0.2 \text{ rad}$ となるとき、 $I/I_{xx}$ を求めよ。ただし、 $\tan \alpha \approx \alpha$ の近似を用いてよい。

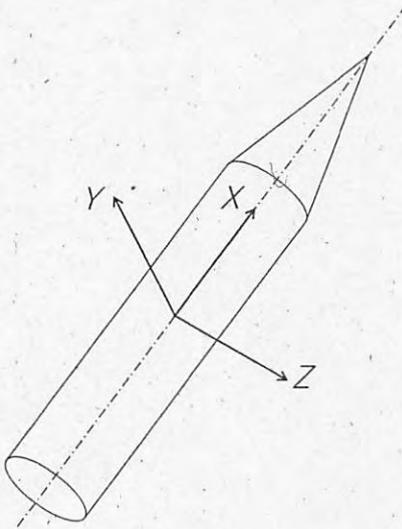


図1

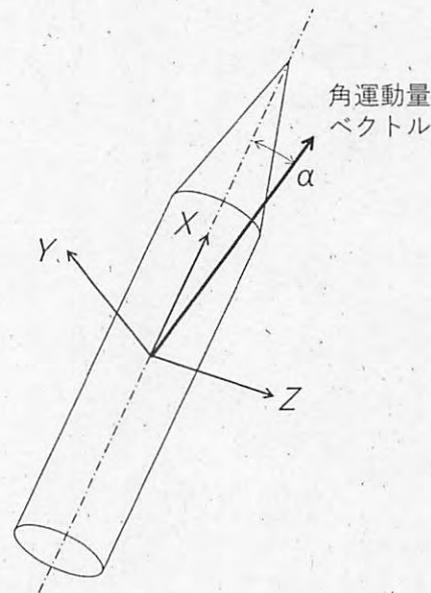


図2

## 推進工学（午前）

振動型ジャイロスコープの原理は、図1に示すような紙面に垂直な $z$ 軸まわりの角速度 $\Omega_z$ が箱に加わった場合に、箱の中の $x-y$ 面内の2自由度振動子に作用するコリオリ力を検知するものである。ここで座標系は箱に固定され、その原点は箱の中心にあるものとする。図1の $x$ 軸に沿って振動子を加振力で駆動し、直交方向（ $y$ 軸）に生じる振動の振幅から角速度 $\Omega_z$ を求めることができる。なお、振動子は質点と考えてよい。

第1問 この振動子の運動方程式を示せ。ここで、 $m, C_i, k_i, f_i$ をそれぞれ、振動子の質量、減衰定数、ばね定数、加振力として用いよ。なお、 $i = x, y$ であり、以降においても同様とする。

第2問 無減衰の場合の系の固有角振動数 $\omega_i$ と振動の $Q$ 値 $Q_i = \sqrt{mk_i}/C_i$ を用いて第1問の運動方程式を書き換えよ。

以降の解答においては $C_i, k_i$ は用いず、代わりに $\omega_i, Q_i$ を用いること。

第3問  $\Omega_z = 0$ の場合を考える。 $x$ 軸の運動方程式において、 $x$ 軸の振動が最大振幅をとるときの $Q_x$ の条件と角振動数 $\omega$ を求めよ。

第4問 角速度 $\Omega_z$ を加えた場合を考える。振動子が $x$ 軸方向に振幅 $X_0$ 、角振動数 $\omega = \omega_x$ で $x = X_0 \sin(\omega_x t)$ のように駆動されているとする。ここで $t$ は時刻とする。 $y$ 軸の運動方程式を $f_y = 0$ として解き、この場合の $y$ 軸の振幅 $Y_0$ と $\Omega_z$ の関係を求めよ。

第5問 角速度を数値積分することなく回転角度を直接測るものを積分型ジャイロスコープという。同様の原理のものにフーコーの振り子がある。これに相当するものを図1のような2自由度振動子で実現しようとする場合に求められる要件や動作について考察せよ。

(次ページへ続く)

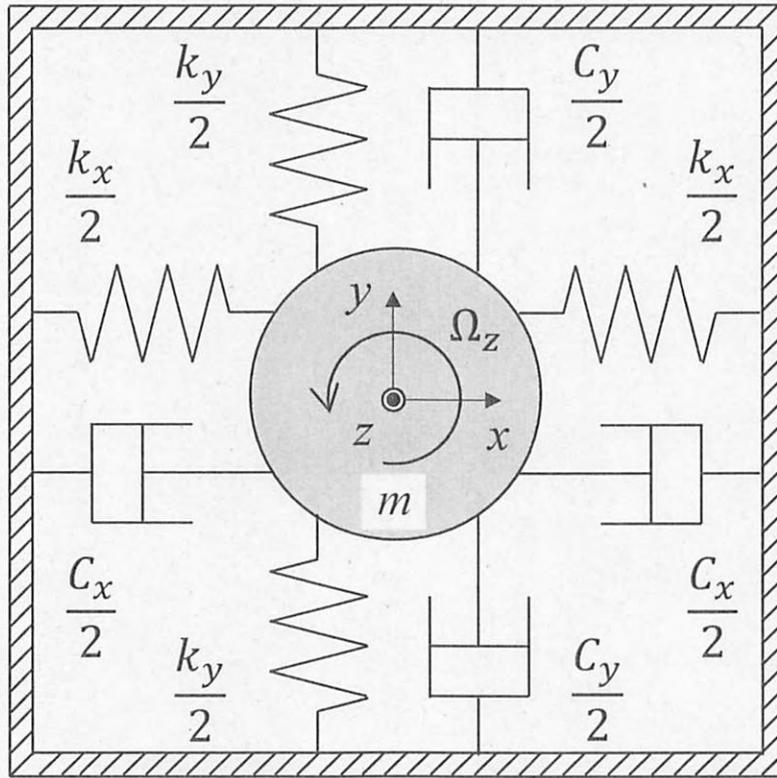


図1 箱に入った2自由度振動子

